Beitrag zur experimentellen Bestimmung geometrisch-optischer Täuschungen.

Inaugural-Dissertation

der

Hohen Philosophischen Facultät (II. Section)

der

Kgl. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

von

Ernst Burmester
aus München.

Mit einer Tafel.

Leopold Voss, Hamburg.
1896.

Verlagsanstalt und Druckerei A.-G. (vormals J. F. Richter) in Hamburg.

1. Vorbemerkungen.

Die Beachtung der mannigfaltigen geometrisch-optischen Täuschungen wurde seit der Entdeckung der auffälligen Täuschung in dem von ZÖLLNER[1] veröffentlichten Muster besonders veranlafst. Nachdem ZÖLLNER seine erste Abhandlung über diese Täuschung an POGGENDORFF zur Aufnahme in seine *Annalen* gesandt hatte, bemerkte dieser in der Zeichnung des Musters eine nonienartige Verschiebung der zu einander gehörenden Teile der Transversalen, wie Fig. 1 der Tafel es zeigt, und machte ZÖLLNER hierauf aufmerksam. Diese eigentümliche Erscheinung unterzog ZÖLLNER einer Prüfung, deren Ergebnisse noch in derselben Abhandlung aufgenommen wurden. In dieser wies nun ZÖLLNER nach, dafs die Intensität der Täuschung,

---

[1] ZÖLLNER, Über eine neue Art von Pseudoskopie und ihre Beziehungen zu den von PLATEAU und OPPEL beschriebenen Bewegungsphänomenen. *Poggendorffs Annalen.* Bd. 110. S. 500. 1860. ZÖLLNER, Über die Abhängigkeit der pseudoskopischen Ablenkung paralleler Linien von dem Neigungswinkel der sie durchschneidenden Querlinien. *Poggendorffs Annalen.* Bd. 114. S. 587. 1861. Ferner findet sich in ZÖLLNERS Werk: *Über die Natur der Kometen, Beiträge zur Geschichte der Theorie der Erkenntnis*, Leipzig 1883, ein Abdruck beider Abhandlungen und in einem Anhang zu denselben ein polemischer Angriff gegen die von HELMHOLTZ in seiner *Physiologischen Optik* entwickelte Theorie, sowie eine Erweiterung der Täuschungsbeobachtungen unter dem Einflufs des elektrischen Funkens. Daselbst ist auch eine Abbildung des zu den pseudoskopischen Messungen von ZÖLLNER verwendeten Apparates gegeben.

d. h. der scheinbaren Konvergenz bezw. Divergenz der Längsstreifen seines Musters, von der Breite der Längsstreifen und der Transversalstreifen unabhängig sei. Denn die Täuschung trat in derselben Deutlichkeit auf, wenn nur eine Vorstellung von der Figur durch feine Striche erzeugt wurde (Fig. 2). Demnach konnte auch die parallele Verschiebung der zu einander gehörenden Teile der Transversalen am Zustandekommen der Täuschung nicht beteiligt sein. Damit verlor aber diese Erscheinung für Zöllner bei seinen speziellen Forschungen nach der Ursache der Konvergenz und Divergenz der Längsstreifen seines Musters ihre Bedeutung, und die Bemerkung Poggendorffs blieb unbeachtet, bis Hering und Kundt unabhängig von einander fast gleichzeitig auf verschiedenen Wegen zu einer gleichen Erklärung der Verschiebung kamen.

Die Parallelverschiebung (Fig. 11), welche an zwei zu einander gehörenden Stücken eines Transversalstreifens im Zöllnerschen Muster auftritt, zeigt sich in gleichem Mafse auch dann, wenn ein Längsstreifen durch zwei Parallele von entsprechendem Abstand und die Stücke des Transversalstreifens durch Stücke einer Transversallinie ersetzt werden, d. h. eine gegen zwei Parallele gezogene Gerade (Transversale), welche innerhalb derselben absetzt, erscheint ebenfalls in ihren Teilen längs der Parallelen verschoben (Fig. 3). Im Folgenden soll in diesen beiden Fällen diese Täuschungsfigur mit dem Namen ihres Entdeckers als Poggendorffsche Figur bezeichnet werden.

Diese geometrisch-optische Täuschung soll in der vorliegenden Abhandlung experimentell bestimmt und auf ihren Zusammenhang mit der Breite des Streifens oder dem Abstand der Parallelen und dem Neigungswinkel der Transversalen untersucht werden. Eine kurze Darlegung der Theorien, welche zur Erklärung dieser Täuschung seit ihrem Bekanntwerden aufgestellt worden sind, wird zeigen, dafs die Untersuchung der Täuschung sich notwendig auf eine experimentelle Bestimmung gründen mufs, wenn auf diesem Gebiete neue Ergebnisse gewonnen werden sollen.

Hering[1] und Kundt[2] erklären die Täuschung in der

---

[1] Hering, *Beiträge zur Physiologie.* Erstes Heft. S. 71. 1861.

[2] Kundt, Untersuchungen über Augenmafs und optische Täuschungen. *Poggendorffs Annalen.* Bd. 120. S. 118. 1863.

Poggendorffschen Figur durch die Annahme, dafs die Beurteilung der Länge der Schenkel eines Winkels nach den Sehnen der entsprechenden Bögen auf der Netzhaut des Auges geschehe und eine Überschätzung des spitzen Winkels zur Folge habe, welche als die Ursache der Täuschung betrachtet wird.

Der experimentelle Nachweis, welcher im dritten Abschnitt dieser Abhandlung geliefert wird, dafs in der Poggendorffschen Figur bei einer Neigung der Transversalen von 60° eine Täuschung von mefsbarer Gröfse besteht, macht die von Hering gegebene Erklärung der Überschätzung spitzer Winkel, aus der hervorgeht, dafs bei 60° keine Täuschung entstehen kann, hinfällig.

Delboeuf[1] hat die Überschätzung spitzer Winkel durch eine „psychophysikalische", Scheffler[2] durch eine auf die Beschaffenheit des menschlichen Auges sich gründende physiologische Theorie zu erklären gesucht. Scheffler geht jedoch in der Entwickelung seiner Theorie von unbegründeten Voraussetzungen aus und hat deswegen keine weitere Beachtung gefunden.

Helmholtz[3] hat die Frage nach der Ursache der Täuschung in der Poggendorffschen Figur eingehend erörtert und zuerst auf die zwei Ursachen aufmerksam gemacht, die bei der Entstehung dieser Täuschung zusammenwirken. Im Allgemeinen lassen sich zwar die Täuschungen aus dem Prinzip der Kontrasterscheinungen erklären, wonach „die deutlich zu erkennenden Unterschiede bei allen Sinneswahrnehmungen gröfser erscheinen als die undeutlich zu erkennenden von objektiv gleicher Gröfse", und der spitze Winkel als deutlich abgegrenzte kleine Gröfse dem stumpfen Winkel gegenüber gröfser erscheint. Füllt man jedoch die Fläche zwischen den Parallelen (Fig. 3 und 11) in der Poggendorffschen Figur schwarz aus oder ersetzt man diese Fläche durch einen Parallelstreifen von schwarzem Papier, so zeigt sich, falls die Transversale von

---

[1] Delboeuf, Note sur certaines illusions d'optique; essai d'une théorie psychophysique de la manière dont l'oeuil apprécie les distances et les angles. *Bulletins de l'Académie royale des sciences des lettres et des beaux-arts de Belgique.* T. XIX. 2 série. p. 195. 1865.

[2] Scheffler, *Die physiologische Optik.* Braunschweig 1865; ferner: Die Statik der Netzhaut und die pseudoskopischen Erscheinungen. *Poggendorffs Annalen.* Bd. 127. S. 105. 1866.

[3] Helmholtz, *Handb. d. physiolog. Optik.* S. 564. Leipzig 1867

gewisser Länge ist, eine Einbiegung derselben in die Ränder der schwarzen Fläche. Diese Erscheinung findet ihre Erklärung in der Irradiation. Im Scheitel des spitzen Winkels treffen die Zerstreuungskreise der beiden Schenkel zusammen und verstärken sich; „dadurch rückt das Maximum des Dunkels im Netzhautbild der schmalen Linie dem breiten Streifen näher und sie erscheint gegen diesen hingelenkt". Durch diese Einbiegungen an beiden Seiten des Streifens werden die Geradenstücke in demselben Sinne aus ihrer Richtung abgelenkt, in dem sie durch die Überschätzung spitzer Winkel für sich abgelenkt werden; beide Faktoren wirken in gleichem Sinne; sie verstärken sich also; mithin ist die Irradiation neben der Überschätzung des spitzen Winkels als ein zweiter wesentlicher Faktor am Zustandekommen der auffallend stark hervortretenden Täuschung zu betrachten.

Helmholtz hatte eine neue Auffassung in dem Studium der geometrisch-optischen Täuschungen dadurch gegeben, dafs er zuerst auf die Notwendigkeit hinwies, bei den mannigfaltigen Täuschungen in jedem einzelnen Falle die Bedingungen aufzusuchen, welche die Entstehung der Täuschung ermöglichen.

Eine Analyse der Täuschung in der Poggendorffschen Figur hinsichtlich ihrer primären Faktoren versuchte zuerst Wundt.[1] Werden die Parallelen in eine vertikale Lage gebracht, so soll die Täuschung in diesem Falle deshalb wesentlich stärker auftreten, weil hier das Vorhandensein von „Fixationslinien" in vertikaler Richtung, ferner die bereits von Oppel[2] erkannte Überschätzung vertikaler Dimensionen und endlich die Überschätzung des spitzen Winkels als die bei der Erzeugung der Täuschung beteiligten Faktoren zur Geltung kommen. Werden dagegen die Parallelen in eine horizontale Lage gebracht, so kommen nur „der zurückbleibende Einfluſs der Fixationslinien auf das Augenmafs" und die Überschätzung des spitzen Winkels in Betracht. Die hierbei von Wundt gemachte Wahrnehmung, dafs die Täuschung in demselben Sinne, wenn auch wesentlich schwächer, noch dann auftrete, wenn in der vertikalen Lage der Figur die Parallelen weggelassen, also

[1] Wundt, *Grundzüge der physiologischen Psychologie.* 2. Bd. S. 142. Leipzig 1874.

[2] Oppel, Über geometrisch-optische Täuschungen. *Jahresbericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt am Main.* S. 37. 1854/55.

nur Stücke jener Geraden (Transversalen) gezeichnet sind, gilt ihm als Bestätigung der Annahme, dafs die Überschätzung vertikaler Dimensionen als Täuschungsfaktor in der Poggendorffschen Figur thatsächlich mitwirke. Dagegen wird im achten Abschnitt durch unsere Beobachtung nachgewiesen, dafs in diesem Falle eine Täuschung in entgegengesetztem Sinne auftritt.

Nach der von Müller-Lyer[1] im Jahre 1889 veröffentlichten Entdeckung, dafs zwei pfeilartige Ansätze an den Enden zweier gleich langer Geraden mit den Spitzen nach innen gerichtet eine verlängernde, nach aufsen gerichtet eine verkürzende Wirkung ausüben, hat Brentano in einer Abhandlung[2] durch eine Analyse der Müller-Lyerschen Figuren die Täuschung in der Poggendorffschen Figur ebenfalls auf die Überschätzung spitzer Winkel zurückgeführt.

Als Erklärungsprinzip nimmt auch Thiéry[3] die Überschätzung spitzer Winkel an, und zwar auf Grund einer „falschen Pseudoskopie" der zwei Winkel, welche die Transversale mit jeder der beiden Parallelen bildet. Diese Pseudoskopie bedinge eine parallele Verschiebung der zu einander gehörenden Teile der Transversalen längs der Parallelen, welche dem Abstand dieser Parallelen proportional sein müsse.

Alle Versuche, die geometrisch-optische Täuschung in der Poggendorffschen Figur durch geometrische Anschauung, durch physiologische Vorgänge im Innern des Auges oder durch psychologische Momente bei der Beurteilung der Überschätzung des spitzen Winkels in der Figur zu erklären, befriedigen nicht, weil sie sich nicht auf eine experimentelle Bestimmung der Täuschung gründen und die Thatsache unberücksichtigt lassen,

---

[1] Müller-Lyer, Optische Urteilstäuschungen. *Archiv für Physiologie.* Supplementbd. 1889.

[2] Brentano, Über ein optisches Paradoxon. *Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane.* Bd. III. S. 349. 1892. Auf diese Abhandlung folgten: Lipps, Optische Streitfragen zu: Brentanos, „Über ein optisches Paradoxon". Ebenda. Bd. III. S. 498. 1892. Brentano, Über ein optisches Paradoxon. 2. Artikel. Ebenda. Bd. V. S. 61. 1893. Delboeuf, Sur une nouvelle illusion d'optique. *Rev. scientif.* T. 51. p. 237. 1893. Brentano, Zur Lehre von den optischen Täuschungen. *Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane.* Bd. IV. S. 1. 1894. Auerbach, Erklärung der Brentanoschen optischen Täuschung. Ebenda. Bd. VII. S. 152. 1894.

[3] Thiéry, Über geometrisch-optische Täuschungen. *Philos. Stud.*, herausgegeben von Wundt. 11. Bd. 3. Heft. S. 307. 1895.

dafs die Überschätzung des spitzen Winkels durch die Gestalt der Figur bedingt wird. Die Täuschung tritt in Fig. 4, wo das eine Geradenstück weggelassen ist, und die gedachte Verlängerung der anderen Geraden durch einen Punkt geht, schwächer, in Fig. 6, wo die andere Gerade mit den Parallelen den gleichen Winkel in entgegengesetztem Sinne bildet, stärker hervor als in der POGGENDORFFschen Figur; sie ändert sich auch an dieser mit dem Abstand der Parallelen und dem Neigungswinkel der Transversalen.

THIÉRY nahm die erste quantitative Bestimmung der Täuschung an der POGGENDORFFschen Figur durch Messung der Verschiebung für eine Neigung der Transversalen von 30° gegen die Parallelen und für Abstände derselben von 20, 40, 60 und 80 mm vor. Zu diesen Messungen wurde ein Apparat verwendet, an welchem das eine Stück der Transversalen aus der geometrisch richtigen Verlängerung durch eine Hilfsperson soweit verschoben wurde, bis dasselbe einem Beobachter in der scheinbaren Verlängerung des anderen Stückes zu liegen schien. Die hierbei auftretende Differenz konnte an einer Millimeterskala abgelesen werden.

THIÉRY hat selbst nicht beobachtet, sondern die Ergebnisse verschiedener Beobachter mitgeteilt. Die von ihm mitgeteilten Zahlen zeigen nur im allgemeinen eine Zunahme der Täuschung mit dem Abstand der Parallelen.

Die Täuschung in der POGGENDORFFschen Figur wollen wir für verschiedene Neigungswinkel der Transversalen und für verschiedene Abstände der Parallelen messen und die von THIÉRY theoretisch abgeleitete Proportionalität zwischen Verschiebung und Abstand auf ihre allgemeine Gültigkeit prüfen; ferner den Einfluſs der Neigung auf die Täuschung untersuchen. Aus den Beobachtungen der geometrisch-optischen Täuschung wird sich eine einfache empirische Formel ergeben, die eine Beziehung zwischen den drei Gröſsen Täuschung, Neigung und Abstand enthält.

2. Beschreibung und Gebrauch des Apparates zur Messung geometrisch-optischer Täuschungen.

Eine zweckmäſsige Versuchsanordnung bei der Messung geometrisch-optischer Täuschungen hat zwei Bedingungen zu erfüllen. Erstens muſs der Beobachter die Verschiebungen

selbst ausführen, weil nur dann die individuelle Beurteilung der Täuschung unvermittelt zum Ausdruck gelangen kann. Zweitens müssen die bei der jedesmaligen Einstellung angezeigten Differenzen in einer Weise registriert werden können, dafs dem Beobachter die Ergebnisse bis zum Abschlufs der Beobachtungsreihe verborgen bleiben. Beide Forderungen sind durch einen Apparat erfüllt worden, der in Fig. 10 in $^1/_5$ natürlicher Gröfse gezeichnet ist.

Durch Strichpunktierung sind vier Längsleisten L_1, L_2, L_3, L_4 und die sie verbindenden beiden Querleisten Q, Q' angedeutet. Auf diesem Gitter von Fichtenholz sind zwei Platten P, P' von Mahagoniholz festgeschraubt, zwischen denen sich eine bewegliche Schiene S von gleichem Holz befindet. Die Vorderflächen der beiden Platten und der Schiene liegen in einer Ebene. Die Schiene S ist mit zwei vertieften Ansätzen s, s' versehen, wie aus dem seitlich in der Figur dargestellten Durchschnitt des Apparates längs der Schienenmitte ersichtlich ist. Diese Ansätze gleiten unter den hölzernen Querleisten q, q' und unter den messingenen Querstäben m, m', welche in die Platten eingelassen sind. Die Schiene gleitet auf den beiden Längsleisten L_2 und L_3. Hierdurch wird die Führung der Schiene gebildet. Ferner sind an den zwischen den Längsleisten L_2 und L_3 befestigten Holzstücken h, h' zwei Druckfedern f, f' festgeschraubt, um bei vertikaler Lage der Schiene das Gleiten derselben, welches durch ihre Schwere verursacht wird, zu verhindern. In den vertieften Ansätzen s, s' der Schiene S sind zwei Registriertafeln t, t' mit Schwalbenschwanzführung in der Längsrichtung eingeschoben und behufs ihrer Feststellung auf der Schiene S mit je einem Schräubchen σ, σ' versehen, welche in die Ansätze s, s' der Schiene S eingreifen. Die messingnen Querstäbchen m, m' enthalten 32 Löcher, die in einer Richtung liegen. Am 11ten bezw. 22ten Loch ist je eine kleine Marke angebracht, welche drei Gruppen zu zehn Beobachtungen von einander trennt und der Übersichtlichkeit dient. Die Verschiebung der Schiene S wird durch einen einarmigen eisernen Hebel H bewirkt, der durch die Platten P, P' und die Schiene S verdeckt ist. Dieser Hebel mit dem festen Drehpunkt F ist mit einer Nute versehen, in welcher ein in der Schiene S festgeschraubter eiserner Zapfen Z gleitet. Am Ende dieses Hebels sind zwei Rollen r, r' angebracht. Durch

eine Saite z, welche hinter der Platte P' an einer Öse o befestigt, über die Rolle r geht und aus der Öffnng ω heraustritt, wird der Hebel nach ω hin bewegt. Ebenso wird der Hebel durch eine zweite Saite z', die an der Öse o' befestigt, über die Rolle r' geht und aus der Öffnung ω' heraustritt, nach ω' bewegt. Vermittelst dieser beiden Saiten z, z' kann der Beobachter durch Ziehen die Schiene nach beiden Richtungen verschieben. Die Anordnung ist so gewählt, dafs einer Zugstrecke einer Saite angenähert $^1/_6$ der Verschiebungsstrecke der Schiene S entspricht.

Auf jede der Registriertafeln t, t', welche in die Schiene S eingeschoben sind, ist ein weifses Papierblatt geklebt und durch die Schräubchen σ, σ' auf derselben festgestellt. Auf den Platten P, P' und der Schiene S sind starke, weifse Kartons befestigt. Auf diesen Kartons ist die Poggendorffsche Figur in folgender Weise dargestellt. Statt die Parallelen auf den Kartons zu beiden Seiten der Grenzlinie, in welcher der bewegliche Karton an dem festen gleitet, zu zeichnen, wurde ein Parallelstreifen von schwarzem Papier mit seinen Enden an den hölzernen Querleisten q, q' festgeklebt, wodurch die Grenzlinie ganz und eine auf den Kartons gezeichnete Gerade so verdeckt wurde, dafs die aus dem Streifen heraustretenden Stücke von gleicher Länge waren. Aus Beobachtungen ergab sich, dafs unter gleichen Bedingungen dieselbe Täuschung bei einem schwarzen Streifen, wie bei zwei Parallelen, deren Abstand gleich der Breite des Streifens ist, auftritt. Jedoch entschied für Anwendung des befolgten Verfahrens der Vorteil, dafs die Grenzlinie verdeckt war und eine Erneuerung der Kartons, die bei einer Aufzeichnung der Parallelen für die verschiedenen Abstände derselben erforderlich gewesen wäre, unterlassen werden konnte, so lange die Neigung der Transversalen dieselbe blieb. Nachdem die zu untersuchende Täuschungsfigur in der angegebenen Weise auf den Kartons zur Darstellung gebracht worden war, wurde die geometrisch richtige Lage der Geradenstücke durch Stiche mit einer Nadel, welche genau in die Löcher der messingnen Querstäbe m, m' pafste, auf den Papierblättern der Registriertafeln t, t' fixiert und der Apparat mit einem weifsen Papierrahmen soweit bedeckt, dafs die zu beobachtende Figur umschlossen war; ferner befanden sich in diesem Papierrahmen zwei Schlitze, damit die Lochreihen der

Messingstäbe sichtbar blieben. Dann wurde der Apparat an einem Gestell in Aughöhe befestigt. Durch ein zweites Gestell wurde die Augentfernung, der senkrechte Augabstand von der Mitte der Figur festgelegt. Dieser Abstand betrug bei allen Beobachtungen 800 mm. Die Vertikalstellung des Apparates wurde mittelst eines Senkels vorgenommen. Jede Einstellung des beweglichen Geradenstückes in die scheinbare Verlängerung des festen Geradenstückes wurde durch einen Stich mit der Nadel registriert.

Es mufs bemerkt werden, dafs die Einstellungen wegen der Unsicherheit in der Beurteilung im allgemeinen schwierig waren und dafs die unten mitgeteilten Ergebnisse meist erst nach vorgängiger Einübung gewonnen wurden. Damit ist die Notwendigkeit einer einheitlichen Durchführung dieser Messungen durch einen Beobachter, welcher beständig in Übung bleibt, dargelegt.

Nach Abschlufs einer Beobachtungsreihe wurden die einzelnen auf dem Papierblatt registrierten Verschiebungen an einem Transversalmafsstab auf Zehntelmillimeter abgegriffen.

3. Messung der geometrisch-optischen Täuschung in der Poggendorffschen Figur.

Die Variierung der Versuchsbedingungen in Bezug auf die Breite des schwarzen Streifens, den Neigungswinkel der Transversalen und die Länge derselben liefert eine solche Fülle von Täuschungsobjekten für die Messung, dafs eine Einschränkung der Beobachtungsreihen erforderlich ist. Es wurde deshalb zunächst eine konstante Länge von 100 mm für die aus dem Parallelstreifen heraustretenden Geradenstücke oder Teile der Transversalen angenommen, weil sich dann die Transversale durch das Gesichtsfeld erstreckt. Eine weitere Einschränkung ergab sich durch die praktische Schwierigkeit der Messung der Verschiebung für Neigungswinkel der Transversalen von unter 20^0 und über 60^0, wegen der Unsicherheit der Einstellung im ersten Falle, und wegen der Geringfügigkeit des Betrages der Täuschung im zweiten Falle.

Die Verschiebung wurde daher für die Neigungswinkel 20^0, 30^0, 40^0, 50^0 und 60^0 und für eine Breite des schwarzen Streifens von 10, 20, 30 und 40 mm gemessen, wobei in der vertikalen

Lage des Streifens in einer ersten Versuchsreihe der rechte obere Teil der Transversalen, in einer zweiten Versuchsreihe der linke untere Teil derselben, in der horizontalen Lage des Streifens in einer ersten Versuchsreihe der linke obere Teil, in einer zweiten der rechte untere Teil der Transversalen bewegt und eingestellt wurde. Bei einer Neigung von 20^0 liefs sich die Täuschung aufserdem schon für eine Breite von 5 mm messen; für eine Breite von 40 mm aber zeigten die einzelnen Beobachtungen zu grofse Schwankungen. Bei einer Neigung von 60^0 zeigte sich erst eine merkliche Verschiebung bei einer Breite des Streifens von 20 mm.

In den folgenden Tabellen sind die Ergebnisse der einzelnen Beobachtungen aufgeführt, um die Schwankungen in der Beurteilung der Täuschung erkennen zu lassen. Alle Angaben beziehen sich auf Millimeter.

Werden die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen vom arithmetischen Mittel mit $\triangle_1, \triangle_2, \ldots \triangle_n$, bezeichnet und bedeutet $n = 10$ die Anzahl der Beobachtungen, so ist der mittlere Fehler, welcher der einzelnen Beobachtung anhaftet,

$$\mu = \sqrt{\frac{\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \ldots \triangle_n^2}{n-1}}$$

und die mittlere Variation

$$m\ V = \frac{\triangle_1 + \triangle_2 + \ldots \ldots \triangle_n}{n},$$

worin die $\triangle$ nach ihrem absoluten Werte zu nehmen sind. Jeder Beobachtungsreihe ist der mittlere Fehler und die mittlere Variation beigefügt.

In den Tabellen sind die Verschiebungen für abnehmende Neigungswinkel und zunehmende Breiten eingetragen, um die allmähliche Zunahme der Verschiebung übersichtlich darzulegen.

Die Vergleichung der Ergebnisse in den nachstehenden Tabellen zeigt, dafs die Verschiebungen für die vertikale und für die horizontale Stellung einer Poggendorffschen Figur nur um Gröfsen differieren, welche innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen. Demnach ergiebt sich, dafs bei einer Poggendorffschen Figur in vertikaler und in horizontaler Stellung keine Verschiedenheit der Täuschung besteht.

Neigung 60°.

Breite: 20 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	1,7			1,2			2,0			1,7		
2	1,2			1,6			1,6			1,8		
3	1,9			1,6			1,3			1,9		
4	1,1			1,5			1,9			1,5		
5	1,5	$\mu =$	$mV =$	1,7	$\mu =$	$mV =$	2,0	$\mu =$	$mV =$	1,4	$\mu =$	$mV =$
6	1,6	0,24	0,18	1,8	0,22	0,17	1,3	0,28	0,24	1,4	0,15	0,11
7	1,6			1,4			1,9			1,5		
8	1,5			1,9			1,7			1,5		
9	1,3			1,5			2,0			1,5		
10	1,6			1,3			2,0			1,5		
Mittel	1,50			1,55			1,77			1,57		
Mittel	1,53						1,67					
Gesamtmittel	1,60											

Breite: 30 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	3,3			2,7			3,0			3,3		
2	2,9			2,3			3,1			2,5		
3	2,5			2,1			3,4			2,6		
4	2,6			2,3			2,9			2,8		
5	2,8	$\mu =$	$mV =$	2,8	$\mu =$	$mV =$	3,4	$\mu =$	$mV =$	2,8	$\mu =$	$mV =$
6	3,3	0,33	0,28	3,4	0,35	0,24	2,9	0,25	0,19	3,0	0,32	0,24
7	2,5			2,7			2,6			3,6		
8	3,2			2,6			3,0			3,0		
9	2,6			2,7			3,1			3,0		
10	2,5			2,6			3,3			2,8		
Mittel	2,82			2,62			3,07			2,94		
Mittel	2,72						3,00					
Gesamtmittel	2,86											

Breite: 40 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	4,1			3,4			2,9			3,3		
2	4.2			3,0			3,4			3,8		
3	4,3			3,0			3,3			2,9		
4	4,1			3,8			3,5			3,9		
5	3,3	$\mu =$	$mV =$	3,2	$\mu =$	$mV =$	3,8	$\mu =$	$mV =$	3,5	$\mu =$	$mV =$
6	4.2	0,47	0,43	4,1	0,59	0,50	3,4	0,28	0,21	3,0	0,40	0,33
7	3,4			4,2			3,8			2,7		
8	3,4			4,4			3,6			3,5		
9	3,0			4,6			3,1			3,1		
10	3,5			4,1			3,5			3,6		
Mittel	3,75			3,78			3,43			3,33		
Mittel				3,77						3,38		
Gesamtmittel							3,57					

Neigung 50°.

Breite: 10 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	1,3			1,8			0,8			1,4		
2	1,3			1,6			1,4			1,0		
3	1,4			1,2			1,5			1,1		
4	1,2			1,5			1,4			0,9		
5	1,2	$\mu =$	$mV =$	1,5	$\mu =$	$mV =$	1,2	$\mu =$	$mV =$	1,3	$\mu =$	$mV =$
6	1,3	0,29	0,24	1,5	0,16	0,10	1,5	0,23	0,18	0,9	0,20	0,18
7	1,4			1,5			1,5			1,3		
8	1,8			1,3			1,0			1,4		
9	1,8			1,5			1,3			1,4		
10	2,0			1,6			1,2			1,1		
Mittel	1,47			1,50			1,28			1,18		
Mittel				1,48						1,23		
Gesamtmittel							1,36					

Breite: 20 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	2,4			2,5			2,5			2,3		
2	2,3			2,5			3,0			2,6		
3	2,9			2,5			2,4			3,1		
4	2,6			2,5			2,4			2,5		
5	2,9	$\mu =$	$mV =$	3,3	$\mu =$	$mV =$	3,0	$\mu =$	$mV =$	2,5	$\mu =$	$mV =$
6	2,3	0,31	0,28	3,2	0,37	0,34	2,4	0,29	0,25	2,4	0,35	0,22
7	2,8			3,2			2,6			2,4		
8	3,1			2,6			2,3			1,8		
9	3,0			2,6			3,1			2,5		
10	2,3			3,3			2,7			2,1		
Mittel	2,66			2,82			2,64			2,42		
Mittel	2,74						2,53					
Gesamtmittel	2,64											

Breite: 30 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	3,3			4,7			3,7			4,2		
2	3,9			3,4			3,6			4,8		
3	3,3			3,4			3,7			5,5		
4	4,0			4,4			3,0			5,2		
5	3,8	$\mu =$	$mV =$	4,1	$\mu =$	$mV =$	4,2	$\mu =$	$mV =$	4,6	$\mu =$	$mV =$
6	3,5	0,33	0,28	3,9	0,51	0,41	3,9	0,41	0,32	4,5	0,52	0,38
7	3,6			4,4			4,4			3,8		
8	4,0			4,3			3,6			3,9		
9	4,0			4,9			3,5			4,5		
10	4,3			4,6			4,2			4,5		
Mittel	3,77			4,21			3,78			4,55		
Mittel	3,99						4,16					
Gesamtmittel	4,08											

Breite: 40 mm

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	4,9			5,6			5,1			5,1		
2	5,9			5,9			6,3			4,6		
3	5,2			4,8			5,6			4,7		
4	5,5			4,9			4,6			5,2		
5	4,9	$\mu =$	$mV =$	5,0	$\mu =$	$mV =$	6,0	$\mu =$	$mV =$	5,4	$\mu =$	$mV =$
6	6,1	0,46	0,37	4,7	0,43	0,36	5,6	0,51	0,40	4,5	0,51	0,40
7	5,8			5,1			5,3			4,2		
8	5,3			5,7			5,8			4,7		
9	5,3			4,7			4,9			5,1		
10	4,7			5,3			5,5			4,5		
Mittel	5,36			5,17			5,47			4,80		
Mittel	5,27						5,13					
Gesamtmittel	5,20											

Neigung 40°.

Breite: 10 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	2,3			2,1			1,5			1,9		
2	1,9			1,9			1,6			2,1		
3	2,3			1,6			2,0			1,4		
4	2,0			1,8			1,8			1,9		
5	1,8	$\mu =$	$mV =$	1,6	$\mu =$	$mV =$	1,7	$\mu =$	$mV =$	1,4	$\mu =$	$mV =$
6	1,8	0,24	0,20	1,5	0,18	0,14	1,3	0,24	0,19	1,7	0,24	0,20
7	2,1			1,6			1,5			1,9		
8	2,1			1,6			2,1			2,0		
9	1,6			1,8			1,8			1,6		
10	1,7			1,7			1,6			1,7		
Mittel	1,96			1,72			1,69			1,76		
Mittel	1,84						1,73					
Gesamtmittel	1,78											

Breite: 20 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	4,0			3,8			3,5			3,4		
2	3,6			4,0			4,1			3,8		
3	3,9			3,4			4,0			4,7		
4	3,1			3,4			4,6			3,2		
5	3,9	$\mu =$	$mV =$	3,9	$\mu =$	$mV =$	4,3	$\mu =$	$mV =$	4,2	$\mu =$	$mV =$
6	3,9	0,32	0,25	3,6	0,33	0,28	4,6	0,38	0,30	3,9	0,50	0,40
7	4,1			3,5			4,0			3,8		
8	3,8			4,2			3,7			3,0		
9	4,1			3,5			4,3			3,3		
10	3,4			4,3			3,7			3,5		
Mittel	3,78			3,76			4,08			3,68		
Mittel	3,77						3,88					
Gesamtmittel	3,82											

Breite: 30 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	4,7			5,7			4,5			5,6		
2	4,7			4,9			4,3			6,9		
3	4,3			4,7			5,1			5,4		
4	5,2			4,4			5,4			5,2		
5	6,0	$\mu =$	$mV =$	5,5	$\mu =$	$mV =$	5,3	$\mu =$	$mV =$	5,7	$\mu =$	$mV =$
6	5,0	0,56	0,46	5,2	0,52	0,41	6,2	0,61	0,49	6,4	0,47	0,32
7	5,4			5,7			5,8			5,6		
8	4,3			5,4			4,6			5,0		
9	4,4			6,0			4,8			5,7		
10	5,4			5,0			4,7			5,0		
Mittel	4,94			5,25			5,07			5,65		
Mittel	5,09						5,36					
Gesamtmittel	5,23											

Breite: 40 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	5,9			7,1			7,2			7,5		
2	6,6			7,2			7,4			7,1		
3	7,0			6,5			7,8			8,3		
4	6,7			7,8			7,1			7,5		
5	6,5	$\mu =$	$mV =$	8,1	$\mu =$	$mV =$	7,0	$\mu =$	$mV =$	8,7	$\mu =$	$mV =$
6	6,8	0,44	0,31	7,3	0,55	0,42	7,7	0,45	0,38	7,1	0,63	0,48
7	7,1			6,4			8,3			7,7		
8	6,5			7,3			8,2			6,9		
9	6,8			7,8			7,4			6,8		
10	7,6			6,9			7,2			7,0		
Mittel	6,75			7,24			7,53			7,46		
Mittel	7,00						7,50					
Gesamtmittel	7,25											

Neigung 30°.

Breite: 10 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	2,6			2,7			1,9			2,9		
2	2,4			2,8			2,0			3,1		
3	2,2			2,5			2,3			2,9		
4	2,7			2,8			2,3			2,7		
5	2,0	$\mu =$	$mV =$	2,7	$\mu =$	$mV =$	1,9	$\mu =$	$mV =$	2,8	$\mu =$	$mV =$
6	1,8	0,32	0,26	2,9	0,28	0,23	2,3	0,31	0,21	2,8	0,24	0,17
7	2,6			2,3			3,0			2,4		
8	2,8			2,1			2,2			2,8		
9	2,5			2,2			2,1			2,4		
10	2,6			2,5			2,3			3,1		
Mittel	2,42			2,55			2,23			2,79		
Mittel	2,48						2,51					
Gesamtmittel	2,50											

Breite: 20 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	5,7			5,7			5,6			4,2		
2	5,8			4,0			6,1			4,6		
3	6 0			5,4			5,8			5,0		
4	5,2			5,0			5,6			5,0		
5	6,7	$\mu =$	$mV =$	4,6	$\mu =$	$mV =$	5,4	$\mu =$	$mV =$	4,1	$\mu =$	$mV =$
6	5,4	0,45	0,33	4,5	0,60	0,46	5,1	0,48	0,37	4,5	0,49	0,38
7	5,8			4,5			6,4			5,0		
8	5,4			4,3			6,7			5,3		
9	5,6			4,0			5,7			4,8		
10	6,3			4,0			5,5			5,7		
Mittel	5,79			4,60			5,79			4,82		
Mittel	5,20						5,30					
Gesamtmittel	5,25											

Breite: 30 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	6,1			8,2			7,9			8,3		
2	7,2			7,4			9,1			7,2		
3	6,1			7,4			8,7			7,8		
4	6,5			6,5			9,4			7,6		
5	6,9	$\mu =$	$mV =$	6,5	$\mu =$	$mV =$	8,2	$\mu =$	$mV =$	7,8	$\mu =$	$mV =$
6	8,5	0,80	0,58	6,7	0,68	0,57	7,8	0,68	0,54	9,4	0,66	0,54
7	7,0			7,2			9,0			8,9		
8	7,2			7,4			9,5			8,4		
9	5,8			6,1			8,8			7,8		
10	5,8			6,1			9,8			8,6		
Mittel	6,71			6,95			8,82			8,18		
Mittel	6,83						8,50					
Gesamtmittel	7,67											

Breite: 40 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	11,8			13,2			12,0			10,7		
2	12,0			13,3			11,2			9,5		
3	13,4			12,2			11,8			9,9		
4	12,0			11,7			11,2			9,8		
5	12,1	$\mu =$	$mV =$	12,0	$\mu =$	$mV =$	12,3	$\mu =$	$mV =$	9,5	$\mu =$	$mV =$
6	11,5	0,67	0,48	11,6	0,77	0,67	11,3	0,40	0,35	10,1	0,59	0,40
7	11,1			13,7			11,8			10,1		
8	11,3			12,7			11,8			9,6		
9	12,3			11,6			11,2			9,6		
10	12,7			12,9			12,0			8,4		
Mittel	12,02			12,49			11,66			9,72		
Mittel	12,26						10,69					
Gesamtmittel	11,47											

Neigung 20°.

Breite: 5 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	2,0			2,3			2,4			3,0		
2	1,3			2,2			2,0			3,1		
3	1,0			2,1			2,0			2,0		
4	1,3			2,2			2,2			2,8		
5	1,5	$\mu =$	$mV =$	2,2	$\mu =$	$mV =$	2,9	$\mu =$	$mV =$	2,9	$\mu =$	$mV =$
6	1,8	0,43	0,36	2,1	0,25	0,17	2,3	0,47	0,42	3,0	0,47	0,37
7	2,2			2,1			3,2			1,6		
8	1,6			2,0			3,2			3,0		
9	2,0			2,9			2,8			3,1		
10	2,3			2,4			2,0			3,0		
Mittel	1,70			2,25			2,50			2,75		
Mittel	1,98						2,62					
Gesamtmittel	2,30											

Breite: 10 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	4,2			3,2			3,3			3,8		
2	4,4			2,6			4,0			3,3		
3	4,5			2,4			3,8			3,4		
4	4,3			2,8			3,7			3,7		
5	4,4	$\mu =$	$mV =$	3,5	$\mu =$	$mV =$	3,5	$\mu =$	$mV =$	2,6	$\mu =$	$mV =$
6	4,5	0,47	0,41	3,5	0,52	0,40	3,9	0,53	0,42	4,0	0,52	0,41
7	3,3			3,5			3,5			2,6		
8	3,3			4,2			4,5			3,2		
9	3,8			3,3			4,7			3,2		
10	3,7			3,0			4,8			2,5		
Mittel	4,04			3,20			3,97			3,23		
Mittel	3,62						3,60					
Gesamtmittel	3,61											

Breite: 20 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	8,0			9,0			9,1			10,4		
2	8,2			10,3			10,0			9,4		
3	8,0			8,8			8,8			9,0		
4	8,0			9,5			8,6			8,1		
5	8,6	$\mu =$	$mV =$	9,2	$\mu =$	$mV =$	8,7	$\mu =$	$mV =$	8,6	$\mu =$	$mV =$
6	8,2	0,38	0,30	8,6	0,76	0,59	9,7	0,65	0,51	8,9	0,87	0,71
7	8,4			8,3			8,9			8,0		
8	8,0			8,1			9,6			9,6		
9	9,1			8,7			7,8			9,8		
10	8,7			10,3			9,5			10,5		
Mittel	8,32			9,08			9,07			9,23		
Mittel	8,70						9,15					
Gesamtmittel	8,92											

Breite: 30 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	13,0			14,0			12,9			13,5		
2	12,2			11,3			12,1			13,2		
3	11,7			12,4			14,7			15,2		
4	12,7			12,9			14,8			13,6		
5	13,1	$\mu =$	$mV =$	12,4	$\mu =$	$mV =$	15,3	$\mu =$	$mV =$	11,7	$\mu =$	$mV =$
6	13,6	0,56	0,46	11,4	0,94	0,69	14,5	1,05	0,85	12,6	1,00	0,72
7	12,7			12,4			14,4			13,7		
8	12,8			12,8			14,0			14,8		
9	12,2			12,9			13,2			14,0		
10	12,0			14,2			15,2			13,1		
Mittel	12,60			12,67			14,11			13,54		
Mittel	12,63						13,83					
Gesamtmittel	13,23											

Hiernach sind die Mittel von je 40 Beobachtungen einer und derselben Versuchsanordnung in Bezug auf Neigungswinkel und Breite im Folgenden benutzt worden, um eine Beziehung zwischen diesen beiden Gröfsen und der Verschiebung aufzusuchen.

4. Ableitung der Gesetzmäfsigkeit der Täuschung in der Poggendorffschen Figur.

Die in den vorliegenden Tabellen dargelegten Ergebnisse der Beobachtungen führen zu der Annahme, dafs die Verschiebung v bei konstantem Neigungswinkel w proportional der Breite u des Streifens, und bei konstanter Breite des Streifens proportional der Kotangente des Neigungswinkels sei. Daraus folgt, wenn durch k eine Konstante bezeichnet wird:

1) $$v = k\,u\ \operatorname{cotg}\ w.$$

Bezeichnen wir mit M die Mittel aus je vier Beobachtungsreihen, die den verschiedenen Werten von u und w zugehören,

so ergiebt sich nach unserer Voraussetzung der wahrscheinlichste Wert der Konstanten k aus der Formel:

$$k = \frac{\Sigma [M u \operatorname{cotg} w]}{\Sigma [(u \operatorname{cotg} w)^2]}$$

und durch Einsetzung der betreffenden Werte folgt:

$$k = 0{,}157142 \sim 0{,}157.$$

Nach Gleichung 1) sind die Verschiebungen v bei allen denjenigen Neigungswinkeln und Breiten berechnet, für welche Beobachtungen ausgeführt wurden. Die berechneten und beobachteten Werte der Verschiebungen, sowie die aus diesen Werten gebildeten Differenzen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Vergleichstabelle.

$u =$ w ‖	5 mm	10 mm	20 mm	30 mm	40 mm
	ber. beob. Diff.	ber. beob. Diff.	ber. beob. Diff.	ber. beob. Diff.	ber. beob. Diff.
60°	(0,45)	(0,91)	1,82 1,60 −0,22	2,73 2,86 +0,13	3,64 3,57 −0,07
50°	(0,66)	1,32 1,36 +0,04	2,64 2,64 0	3,96 4,08 +0,12	5,28 5,20 −0,08
40°	(0,93)	1,87 1,78 −0,09	3,74 3,82 +0,08	5,61 5,23 −0,38	7,48 7,25 −0,23
30°	(1,36)	2,72 2,50 −0,22	5,44 5,25 −0,19	8,16 7,67 −0,49	10,88 11,47 +0,59
20°	2,16 2,30 +0,14	4,31 3,61 −0,70	8,62 8,92 +0,30	12,93 13,23 +0,30	(17,24)

Die in obiger Vergleichstabelle mit Klammern versehenen Zahlen sind unter die beobachteten Verschiebungen hinab bezw. über dieselben hinaus extrapoliert.

Zur Beurteilung der Güte der Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle diejenigen Werte der Konstanten $\varkappa$ zusammen-

gestellt, welche sich für die verschiedenen Neigungswinkel aus der Formel

$$x = \frac{1}{\operatorname{cotg} w} \cdot \frac{\Sigma [Mu]}{\Sigma [u^2]}$$

ergeben.

Vergleichstabelle.

w	60°	50°	40°	30°	20°
x	0,157	0,158	0,151	0,158	0,159

Die Abweichungen der einzelnen Werte dieser Konstanten beginnen erst mit der dritten Dezimalstelle, während für eine Berechnung der Verschiebung auf Zehntelmillimeter in den meisten Fällen nur die zwei ersten Dezimalstellen in Betracht kommen. Für eine Neigung von 20° und eine Breite von 30 mm beträgt nach der Berechnung aus Gleichung 1) der durch Vernachlässigung der dritten Dezimalstelle von k entstandene Fehler erst 0,3 mm.

Die obigen Vergleichstabellen bestätigen die Annahme, dafs

$$v = k\, u \operatorname{cotg} w$$

sei, und es ergiebt sich demnach das Gesetz:

Bei der Poggendorffschen Figur ist die Verschiebung der Geradenstücke proportional der Breite des Streifens und der Kotangente des Neigungswinkels der Transversalen.

Die persönliche Konstante k wird bei verschiedenen Beobachtern verschieden sein.

Setzen wir $u = 1$, $w = 45^0$, so ergiebt sich aus Gleichung 1)

$$v = k,$$

d. h. die Konstante ist gleich der Verschiebung bei einer Neigung von 45° und einer Breite von 1 mm.

Für den Grenzfall $w = 0^0$ wird $v = \infty$, und die Verschiebung verliert ihre Bedeutung.

Für den Grenzfall $w = 90^0$, wird $v = 0$, d. h. eine senkrecht gegen einen schwarzen Streifen gezogene Transversale erscheint in ihren Teilen nicht verschoben.

Nennen wir den senkrechten Abstand der geometrisch richtigen Lage des bewegten Geradenstückes von seiner verschobenen Lage die Versetzung der Geradenstücke und bezeichnen wir dieselbe mit s, so ergiebt sich, da $s = v \sin w$ ist:

2) $$s = k\,u \cos w.$$

Demnach erhalten wir das Gesetz:

Bei der Poggendorffschen Figur ist die Versetzung der Geradenstücke proportional der Breite des Streifens und dem Cosinus des Neigungswinkels der Transversalen.

Setzen wir $u = 1$, $w = 0$, so ergiebt sich aus Gleichung 2)

$$s = k,$$

d. h. die Versetzung nähert sich bei einer Streifenbreite von 1 mm mit abnehmendem Neigungswinkel einem Grenzwert, der gleich k ist.

Durch die experimentelle Bestimmung der Täuschung ist die Abhängigkeit der Täuschung von der Breite des Streifens und dem Neigungswinkel der Transversalen bewiesen.

Alle Versuche einer Erklärung der Täuschung in der Poggendorffschen Figur kommen zu der Annahme einer Überschätzung spitzer Winkel, weil sich durch diese die Parallelverschiebung am einfachsten erklären läfst. Wird diese Überschätzung spitzer Winkel als Hypothese angenommen, so läfst sich aus dem oben erhaltenen Gesetz eine Beziehung zwischen dem Überschätzungswinkel und dem Neigungswinkel der Transversalen durch folgende Betrachtung ableiten.

Bei der Poggendorffschen Figur erklären wir die Verschiebung der in einer Transversalen liegenden Strecken ab, cd in Figur 7 dadurch, dafs man die gleichen spitzen Winkel sba, $s'cd$, beide bezw. um die gleichen Winkel aba', dcd', die mit δ bezeichnet sind, überschätzt und in der Vorstellung den Schenkel ab nach $a'b$ und den Schenkel cd nach cd' dreht. Denkt man sich den Schenkel cd parallel nach $c'd_1$ verschoben und infolge der Überschätzung des Winkels $s'c'd_1$ um den Winkel $d_1c'd'_1 = \delta$ nach $c'd'_1$ gedreht, so wird für eine bestimmte Verschiebungsstrecke cc' die Strecke $c'd'_1$ mit der Strecke $a'b$ in einer Transversalen liegend erscheinen.

Setzen wir in Figur 7 wieder die Streifenbreite $be = u$, die Verschiebung $cc' = v$ und den Neigungswinkel $sba = w$, ferner die Strecke $ec' = h$, so ist:

$$\text{tang } (w + \delta) = \frac{u}{h};$$

ferner

$$h = u \text{ cotg } w - v,$$

und nach Einsetzung des Wertes von v aus Gleichung 1) ergiebt sich

$$h = u \text{ cotg } w - k u \text{ cotg } w = u (1 - k) \text{ cotg } w.$$

Demnach erhalten wir:

$$\text{tang } (w + \delta) = \frac{\text{tang } w}{1 - k},$$

$$\frac{\text{tang } w + \text{tang } \delta}{1 - \text{tang } w \text{ tang } \delta} = \frac{\text{tang } w}{1 - k}$$

und es ergiebt sich

3) $$\text{tang } \delta = \frac{k \,.\, \text{tang } w}{\text{tang}^2 w + 1 - k}.$$

Hieraus folgt der Satz:

Der Überschätzungswinkel δ ist abhängig von dem Neigungswinkel w, bedingt durch die Konstante k, und unabhängig von der Breite u des Streifens.

Für $w = 0$ wird $\delta = 0$.

Für $w = 90^0$ ergiebt sich nach Division des Zählers und des Nenners in Gleichung 3) durch tang w, tang $\delta = 0$, $\delta = 0$. Differentiieren wir die Gleichung 3) nach w, so ist:

$$\frac{d\,(\text{tang } \delta)}{d\,w} = \frac{k\,(\text{tang}^2 w + 1 - k - 2\,\text{tang}^2 w)}{\{\cos w\,(\text{tang}^2 w + 1 - k)\}^2}$$

und diesen Ausdruck gleich 0 gesetzt, erhalten wir:

4) $$\text{tang } w = \sqrt{1 - k},$$
$$w = 42^0\ 33'\ 23'',8.$$

Demnach wird der Überschätzungswinkel δ ein Maximum für $w = 42^0\ 33'\ 23'',8$.

Setzen wir den Wert $\text{tang } w = \sqrt{1 - k}$ in Gleichung 3) ein, so erhalten wir:

5) $$\text{tang } \delta_{\max} = \frac{k}{2\sqrt{1 - k}},$$

woraus sich

$$\delta_{max} = 4^0\ 53'\ 12'',5$$

ergiebt.

In der folgenden Tabelle sind die zu verschiedenen Neigungswinkeln w gehörigen Überschätzungswinkel δ und ihre zugehörigen Bogenlängen l für den Radius 1 eingetragen.

w	10°	20°	30°	40°
δ	1° 48′ 51″,1	3° 21′ 02″,7	4° 24′ 27″,2	4° 52′ 02″,8
l	0,03165	0,05846	0,07692	0,08494

w	50°	60°	70°	80°
δ	4° 43′ 35″,3	4° 02′ 51″,1	2° 54′ 28″,3	1° 32′ 42″,8
l	0,08247	0,07063	0,05073	0,02695

Um die Veränderung der Überschätzungswinkel δ, welche den verschiedenen Neigungswinkeln w entsprechen, zu veranschaulichen, sind die für die verschiedenen Neigungswinkel in der obigen Tabelle enthaltenen Bogenlängen der Überschätzungswinkel als Radienvektoren im Verhältnis 400 : 1 nach Millimetern (Fig. 8) eingetragen, und die zugehörige blattförmige Kurve gezeichnet. Dieselbe läfst erkennen, wie bei dem von 0° bis 90° wachsenden Winkel w der Überschätzungswinkel δ von 0° an erst rasch, dann langsamer zunimmt, bei 42° 33′ 23″,8 ein Maximum erreicht; von da an erst langsam, dann rascher bis 0° abnimmt.

In Fig. 11 ist eine geometrisch richtige Zeichnung der Poggendorffschen Figur dargestellt; in Fig. 12 ist dieselbe mit der Verschiebung gezeichnet, welche sich aus jenem Gesetz bei einer Neigung von 30° und einer Breite von 10 mm ergiebt.

5. Messung der geometrisch-optischen Täuschung bei der Schenkelfigur.

Delboeuf[1] hat auf eine Täuschungsfigur aufmerksam gemacht, die dadurch in Fig. 5 entsteht, dafs man eine Gerade

[1] Delboeuf, Sur une nouvelle illusion d'optique. *Rev. scientif.* T. LI. p. 237. 1893.

dc unter spitzem Winkel gegen eine von zwei Parallelen zieht und von dem Punkte b aus, wo ihre gedachte Verlängerung die zweite Parallele trifft, eine zweite Gerade ba unter demselben Neigungswinkel gegen die andere Parallele nach abwärts zieht. Die Täuschung tritt hier in demselben Sinne wie in der POGGENDORFFschen Figur auf; denn damit die gedachte Verlängerung von dc durch den Punkt b zu gehen scheint. mufs die Entfernung der benachbarten Endpunkte b, c eine Verschiebung der einen Geraden gegen die andere in der Richtung der Parallelen verkürzt werden. Diese Figur wollen wir Schenkelfigur nennen. Man erkennt, dafs die Täuschung in der Schenkelfigur stärker auftritt als in der POGGENDORFFschen Figur.

Um die Täuschung bei der Schenkelfigur experimentell zu bestimmen, wurden bei vertikaler Stellung derselben die Verschiebungen für eine Neigung von 30^0, 40^0, 50^0 und 60^0 und für eine Breite des schwarzen Streifens (der aus den im zweiten Abschnitt S. 10 angegebenen Gründen statt der Parallelen verwendet wurde) von 10, 20, 30 und 40 mm gemessen. Dabei wurden, soweit es die Dimensionen des Apparates zuliefsen, korrespondierende Beobachtungen in der Weise vorgenommen, dafs erstens in Fig. 5 der Punkt b des festen Schenkels ab scheinbar in der bewegten Geraden cd liegt und zweitens in Fig. 6 der Punkt c des bewegten Schenkels cd scheinbar in der Geraden ab liegt, also abwechselnd der Scheitel fest und bewegt war. Damit die unteren Schenkelenden in einer Horizontalen sich befanden und die Schenkellängen in den korrespondierenden Lagen gleich 100 mm blieben, wurde die Figur aufser durch einen Rahmen von weifsem Papier durch ein weifses Papierblatt rechtwinklig zu dem Streifen nach unten begrenzt und dieses um die erforderliche Strecke parallel abwärts oder aufwärts verschoben. Im übrigen war die Versuchsanordnung dieselbe wie bei der POGGENDORFFschen Figur.

Von einer Messung der Verschiebung für eine Neigung von 20^0 mufste wegen der Unsicherheit der Messung abgesehen werden.

In den folgenden Tabellen sind die Ergebnisse der Beobachtungen dargelegt.

Neigung 60°.

No. der Beobachtung	Breite: 10 mm						Breite: 20 mm					
	Scheitel fest			Scheitel bewegt			Scheitel fest			Scheitel bewegt		
1	1,5			2,0			2,7			3,6		
2	1,3			2,3			3,5			2,8		
3	1,6			2,2			3,8			3,0		
4	1,9			1,8			3,3			2,9		
5	1,5	$\mu =$	$mV =$	1,8	$\mu =$	$mV =$	3,1	$\mu =$	$mV =$	2,8	$\mu =$	$mV =$
6	1,3	0,20	0,17	2,1	0,40	0,32	2,6	0,35	0,24	3,7	0,31	0,24
7	2,0			2,1			3,1			3,2		
8	1,8			1,5			3,1			3,2		
9	1,6			1,3			3,1			3,0		
10	1,6			1,1			3,1			3,2		
Mittel	1,61			1,82			3,14			3,14		
Mittel	1,71						3,14					

No. der Beobachtung	Breite: 30 mm						Breite: 40 mm					
	Scheitel fest			Scheitel bewegt			Scheitel fest			Scheitel bewegt		
1	4,7			5,1			6,6			7,0		
2	4,6			4,3			7,2			5,6		
3	4,4			5,0			7,1			5,3		
4	4,8			4,2			7,8			6,3		
5	4,1	$\mu =$	$mV =$	4,1	$\mu =$	$mV =$	8,6	$\mu =$	$mV =$	6,6	$\mu =$	$mV =$
6	5,1	0,44	0,33	4,2	0,36	0,30	7,3	0,53	0,39	6,2	0,60	0,48
7	5,1			4,5			7,5			5,8		
8	5,7			4,3			7,2			6,1		
9	5,0			4,3			7,6			6,9		
10	4,6			4,8			7,8			7,0		
Mittel	4,81			4,48			7,47			6,28		
Mittel	4,65						6,87					

Neigung 50°.

No. der Beobachtung	Breite: 10 mm						Breite: 20 mm					
	Scheitel fest			Scheitel bewegt			Scheitel fest			Scheitel bewegt		
1	2,4			1,8			5,7			5,0		
2	2,6			3,0			5,5			4,8		
3	2,6			2,2			5,8			5,0		
4	2,7			3,1			6,7			4,3		
5	2,4	$\mu =$	$mV =$	2,7	$\mu =$	$mV -$	5,4	$\mu =$	$mV =$	4,5	$\mu =$	$mV =$
6	2,7	0,19	0,16	2,4	0,46	0,39	6,7	0,50	0,38	5,0	0,47	0,41
7	2,2			2,0			5,5			4,1		
8	2,2			2,0			5,4			4,0		
9	2,5			2,7			5,5			3,9		
10	2,3			2,1			5,5			5,1		
Mittel	2,46			2,40			5,77			4,57		
Mittel	2,43						5,17					

No. der Beobachtung	Breite: 30 mm						Breite: 40 mm					
	Scheitel fest			Scheitel bewegt			Scheitel fest			Scheitel bewegt		
1	9,0			7,2			13,0			10,2		
2	9,4			7,7			11,9			9,1		
3	9,3			7,4			12,2			8,1		
4	8,8			8,4			12,6			8,9		
5	8,6	$\mu =$	$mV =$	7,7	$\mu =$	$mV =$	11,0	$\mu =$	$mV =$	9,0	$\mu =$	$mV =$
6	9,7	0,49	0,39	8,7	0,51	0,40	11,4	0,76	0,57	8,7	0,58	0,40
7	9,3			7,2			11,7			9,8		
8	8,9			7,4			11,6			8,9		
9	8,6			8,2			10,4			8,9		
10	8,0			7,8			11,3			9,2		
Mittel	8,96			7,77			11,71			9,08		
Mittel	8,37						10,40					

Neigung 40°.

No. der Beobachtung	Breite: 10 mm						Breite: 20 mm					
	Scheitel fest			Scheitel bewegt			Scheitel fest			Scheitel bewegt		
1	4,5			4,0			7,9			7,8		
2	4,9			3,2			8,4			6,6		
3	4,2			3,5			8,4			7,3		
4	4,1			3,4			8,5			6,7		
5	3,7	$\mu =$	$mV =$	3,4	$\mu =$	$mV =$	8,4	$\mu =$	$mV =$	7,0	$\mu =$	$mV =$
6	4,5	0,38	0,31	3,4	0,19	0,13	7,1	0,57	0,45	6,7	0,45	0,37
7	4,3			3,2			8,0			7,7		
8	4,9			3,5			9,0			7,4		
9	4,9			3,5			8,8			7,1		
10	4,3			3,5			7,6			6,6		
Mittel	4,43			3,46			8,21			7,09		
Mittel	3,95						7,65					

No. der Beobachtung	Breite: 30 mm						Breite: 40 mm					
	Scheitel fest			Scheitel bewegt			Scheitel fest			Scheitel bewegt		
1	10,3			9,4			14,4			13,6		
2	11,3			9,4			13,9			12,4		
3	10,9			9,0			13,8			12,5		
4	10,2			10,2			14,3			12,4		
5	11,1	$\mu =$	$mV =$	10,2	$\mu =$	$mV =$	14,1	$\mu =$	$mV =$	12,9	$\mu =$	$mV =$
6	10,2	0,67	0,51	10,4	0,50	0,41	13,9	0,39	0,29	12,9	0,46	0,38
7	9,7			10,5			14,2			13,2		
8	10,5			9,9			14.9			12,3		
9	9,1			10,3			13,5			13,3		
10	9,8			10,1			13,9			13,3		
Mittel	10,31			9,94			14,09			12,88		
Mittel	10,12						13,49					

Neigung 30°.

No. der Beobachtung	Breite: 10 mm						Breite: 20 mm					
	Scheitel fest			Scheitel bewegt			Scheitel fest			Scheitel bewegt		
1	6,7			4,8			9,4			8,8		
2	5,3			4,6			9,4			9,5		
3	5,7			4,0			9,3			9,8		
4	5,7			4,0			8,8			9,4		
5	4,5	$\mu =$	$mV =$	3,9	$\mu =$	$mV =$	8,7	$\mu =$	$mV =$	9,6	$\mu =$	$mV =$
6	5,3	0,63	0,46	4,5	0,42	0,34	9,8	0,63	0,48	9,8	0,56	0,45
7	4,9			4,2			9,7			9,8		
8	5,4			3,7			8,2			9,8		
9	4,7			3,5			9,9			8,8		
10	4,8			4,4			10,3			8,2		
Mittel	5,30			4,16			9,35			9,35		
Mittel	4,73						9,35					

No. der Beobachtung	Breite: 30 mm						Breite: 40 mm					
	Scheitel fest			Scheitel bewegt			Scheitel fest			Scheitel bewegt		
1	14,2			13,0			19,3			20,1		
2	14,5			11,3			20,5			20,2		
3	13,8			13,0			21,0			18,8		
4	14,3			12,4			20,1			19,0		
5	15,2	$\mu =$	$mV =$	12,7	$\mu =$	$mV =$	20,0	$\mu =$	$mV =$	17,7	$\mu =$	$mV =$
6	15,5	0,76	0,61	12,7	0,60	0,42	21,1	0,69	0,56	19,0	1,05	0,84
7	16,3			13,0			21,3			19,5		
8	15,0			13,6			19,9			21,3		
9	14,6			13,3			21,4			20,7		
10	14,0			13,0			20,6			19,0		
Mittel	14,74			12,80			20,52			19,53		
Mittel	13,77						20,03					

Diese Beobachtungen zeigen, dafs bei der ersten Anordnung (Fig. 5) fast durchweg gröfsere Verschiebungen auftreten als bei der zweiten Anordnung (Fig. 6). Diese Verschiedenheit mufs dadurch verursacht sein, dafs bei Fig. 6 der Scheitel c bewegt ist, während bei Fig. 5 der Scheitel b fest ist, wenn der rechte Schenkel bewegt wird, wie dies bei den Beobachtungen der Fall war.

6. Ableitung der Gesetzmäfsigkeit der Täuschung in der Schenkelfigur.

Wir entnehmen aus den vorstehenden Tabellen, dafs die Gröfse der Verschiebung in der Schenkelfigur ungefähr das Doppelte der Verschiebung in der Poggendorffschen Figur beträgt; ferner dafs die Verschiebung v bei konstantem Neigungswinkel w der beiden Schenkel gegen den Streifen proportional der Breite u des Streifens und bei konstanter Breite des Streifens proportional der Kotangente des Neigungswinkels ist.

Daraus folgt, wenn durch k' eine Konstante bezeichnet wird,

$$6) \qquad v = k' u \operatorname{cotg} w.$$

Nach dieser Voraussetzung ergiebt sich der wahrscheinlichste Wert der Konstanten aus der Formel:

$$k' = \frac{\Sigma [M u \operatorname{cotg} w]}{\Sigma [(u \operatorname{cotg} w)^2]}$$

und durch Einsetzung der betreffenden Werte folgt:

$$k' = 0{,}286761 \sim 0{,}287.$$

Nach Gleichung 6) sind die Verschiebungen v bei allen denjenigen Neigungswinkeln und Breiten berechnet, für welche Beobachtungen ausgeführt wurden. Die berechneten und beobachteten Werte der Verschiebung, sowie die aus diesen gebildeten Differenzen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Vergleichstabelle.

$u =$ w ‖	10 mm	20 mm	30 mm	40 mm
	ber. beob. Diff.	ber. beob. Diff.	ber. beob. Diff.	ber. beob. Diff.
60°	1,66 1,71 + 0,05	3,32 3,14 − 0,18	4,98 4,65 − 0,33	6,64 6,87 + 0,23
50°	2,41 2,43 + 0,02	4,82 5,17 + 0,35	7,23 8,37 + 1,14	9,64 10,40 + 0,76
40°	3,42 3,95 + 0,53	6,84 7,65 + 0,81	10,26 10,12 − 0,14	13,68 13,49 − 0,19
30°	4,97 4,73 − 0,24	9,94 9,35 − 0,59	14,91 13,77 − 1,14	19,88 20,03 + 0,15

Zur Beurteilung der Güte der Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle diejenigen Werte der Konstanten $\varkappa$ zusammengestellt, welche sich für die verschiedenen Neigungswinkel aus der Formel

$$\varkappa = \frac{1}{\text{cotg } w} \cdot \frac{\Sigma [M u]}{\Sigma [u^2]}$$

ergeben.

Vergleichstabelle.

w	60°	50°	40°	30°
$\varkappa$	0,285	0,316	0,289	0,279

Die obigen Vergleichstabellen bestätigen die Annahme, dafs

$$v = k' u \text{ cotg } w$$

sei, und es ergiebt sich demnach das Gesetz:

Bei der Schenkelfigur ist die Verschiebung der Schenkel proportional der Breite des Streifens und der Kotangente des Neigungswinkels der Transversalen.

Setzen wir $u = 1$, $w = 45^0$, so ergiebt sich aus Gleichung 6)

$$v = k',$$

d. h. die persönliche Konstante k' ist gleich der Verschiebung bei einer Neigung von 45° und einer Breite von 1 mm.

Für den Grenzfall $w = 0^0$ wird $v = \infty$, und die Verschiebung verliert ihre Bedeutung.

Für den Grenzfall $w = 90^0$ wird $v = 0$, wie bei der Poggendorffschen Figur.

Nennen wir den senkrechten Abstand der geometrisch richtigen Lage des bewegten Schenkels von seiner verschobenen Lage die Versetzung und bezeichnen wir dieselbe mit s, so ergiebt sich, da $s = v \sin w$ ist,

$$7) \qquad s = k' u \cos w.$$

Demnach erhalten wir das Gesetz:

Bei der Schenkelfigur ist die Versetzung der Schenkel proportional der Breite des Streifens und dem Cosinus des Neigungswinkels der beiden Schenkel gegen den Streifen.

Setzen wir $u = 1$, $w = 0$, so ergiebt sich aus Gleichung 7)

$$s = k',$$

d. h. die Versetzung nähert sich bei einer Streifenbreite von 1 mm mit abnehmendem Neigungswinkel einem Grenzwert, der gleich k' ist.

Die in der Poggendorffschen Figur auf Seite 25 aus der Hypothese der Überschätzung spitzer Winkel abgeleitete Folgerung, durch welche die Verschiebung der in einer Transversalen liegenden Geradenstücke erklärt wurde, läfst sich jedoch nicht in analoger Weise auf die Schenkelfigur zur Erklärung der fast doppelt so grofsen Verschiebung der Schenkel anwenden. Denn würden nach der daselbst gemachten Annahme in Fig. 9 die gleichen spitzen Winkel sba und $s'cd$ um die gleichen Winkel aba' und dcd' in der Weise überschätzt, dafs der Schenkel ab um b gedreht nach $a'b$, der Schenkel cd um c gedreht nach cd' verlegt würde, so würde statt der geometrisch richtigen Verlängerung des Schenkels ab, welche die Parallele s' in c trifft, infolge jener in der Vorstellung vollzogenen Drehung um den Winkel aba' die Parallele s' in c' zu treffen scheinen. Dagegen würde durch Überschätzung des Winkels $s'cd$ um den Winkel dcd', wodurch dessen Schenkel cd nach cd' verlegt würde, in Bezug auf den Punkt c keine Lagenveränderung eintreten. Danach würde die Verschiebungs-

strecke cc' in der Schenkelfigur mit der für die Poggendorff-sche Figur abgeleiteten Verschiebungsstrecke cc' (Fig. 7) übereinstimmen; es sind aber die Verschiebungen in beiden Täuschungsfiguren unter gleichen Bedingungen verschieden.

Wir wollen die doppelt so grofse Verschiebung, welche in der Schenkelfigur durch die Täuschung bewirkt wird, auf Grund der Hypothese von der Überschätzung spitzer Winkel in folgender Weise zu erklären suchen.

Denken wir uns die Gerade cd (Fig. 9) bis γ verlängert und nehmen wir an, dafs eine Überschätzung des Winkels $s\gamma d$ erfolge und demnach der Winkel $s\gamma d$ um den Winkel $d\gamma d''$, welcher gleich dem Winkel aba' ist, gröfser erscheine, so trifft der Schenkel $\gamma d''$ dieses vergröfsert erscheinenden Winkels die Parallele s' in c''. Aus den symmetrischen kongruenten Dreiecken bcc' und $\gamma cc''$ folgt, dafs $cc' = cc''$ ist; also ist die ganze Verschiebung cc'' doppelt so grofs als die Verschiebung cc', welche sich für die entsprechende Poggendorffsche Figur ergeben würde.

Auch Heymans[1] hat aus experimentellen Untersuchungen der Müller-Lyerschen Täuschungsfiguren für die Täuschung „eine nahezu vollständige Proportionalität zwischen dem Cosinus des Schenkelwinkels und dem mittleren Betrage der Täuschung“ gefunden.

In Figur 15 ist eine geometrisch richtige Zeichnung der Schenkelfigur dargestellt; in Figur 16 ist dieselbe mit der Verschiebung gezeichnet, welche sich aus jenem Gesetz bei einer Neigung von 30° und einer Breite von 10 mm ergiebt.

7. Einfluſs der Länge der Transversalen auf die Täuschung.

Um den Einfluſs der Länge der Transversalen auf die Täuschung kennen zu lernen, wurden der Reihe nach Längen von je 10, 20, 30, 40, 50 und 75 mm für die beiden Geradenstücke gewählt und für diese Längen die Verschiebungen bei einer Neigung von 40° und einer Breite von 20 mm beobachtet, welche in den folgenden Tabellen dargelegt sind.

---

[1] Heymans: Quantitative Untersuchungen über das „optische Paradoxon“. *Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane.* Bd. IX. S. 221. 1896.

Neigung 40°.

Breite: 20 mm.
Vertikale Lage.
Bewegt: rechts oben.

No. der Beobachtung	Länge der Geradenstücke											
	10 mm			20 mm			30 mm			40 mm		
1	3,8			4,2			4,6			3,5		
2	4,5			5,4			4,1			3,7		
3	4,7			4,6			3,8			3,6		
4	5,0			5,0			3,7			4,2		
5	4,0	$\mu =$	$mV =$	4,1	$\mu =$	$mV =$	3,9	$\mu =$	$mV =$	4,5	$\mu =$	$mV =$
6	4,7	0,57	0,38	3,9	0,60	0,53	4,4	0,43	0,36	4,1	0,46	0,40
7	4,4			3,8			5,0			3,7		
8	4,7			4,0			4,0			4,7		
9	5,9			5,0			4,7			4,6		
10	4,8			5,3			4,1			3,6		
Mittel	4,65			4,53			4,23			4,02		
Differenzen	0,12			0,30			0,21			0,14		

No. der Beobachtung	Länge der Geradenstücke					
	50 mm			75 mm		
1	3,5			3,8		
2	3,9			4,0		
3	4,4			3,3		
4	3,7			3,0		
5	3,8	$\mu =$	$mV =$	4,4	$\mu =$	$mV =$
6	4,2	0,27	0,20	3,8	0,54	0,44
7	3,9			4,2		
8	3,8			3,0		
9	4,0			4,5		
10	3,6			3,5		
Mittel	3,88			3,75		
Differenz	0,13					

Die Verschiebung bei einer Neigung von 40°, einer Breite von 20 mm und einer Länge der Geradenstücke zu je 100 mm ergiebt sich nach Formel 1) zu 3,74 mm. Eine Vergleichung

der arithmetischen Mittel der Beobachtungen zeigt eine stetige Abnahme der Täuschung mit zunehmender Länge der Transversalen. Die geringen Differenzen der Verschiebungen, welche jenen verschiedenen Längen der Geradenstücke entsprechen, sind natürlich nicht geeignet, eine Beziehung zwischen der Verschiebung und der Länge der Transversalen abzuleiten. Die Abnahme der Täuschung mit zunehmender Länge der Transversalen erklärt sich am einfachsten wohl durch die Annahme einer Zielwirkung, die sich bei der Einstellung an gröfseren Längen äufsert und der Täuschung entgegenwirkt. Bemerkenswert ist, dafs mit der Abnahme der Länge der Transversalen die Randeinbiegungen schwächer werden und an ihre Stelle eine eigentümliche Krümmung der kurzen Linien auftritt, gleichsam als ob sich die Randeinbiegungen auf die ganze Länge der kurzen Stücke verteilt haben. Fig. 13 zeigt die Zunahme der Täuschung bei abnehmender Länge der Transversalen.

8. Messung der geometrisch-optischen Täuschung bei der Streckenfigur.

Die Schwankungen, welche sich bei der Beurteilung der Täuschung in der Poggendorffschen Figur bemerkbar machten, gaben Veranlassung zur Untersuchung der Genauigkeit, mit welcher in Fig. 17 zwei Strecken für sich, unter Weglassung der Parallelen bezw. des schwarzen Streifens der Poggendorffschen Figur, eingestellt werden können. Diese aus zwei in einer Geraden befindlichen Strecken gebildete Figur wollen wir kurz Streckenfigur nennen. Die Beobachtung zeigte, dafs zwei Strecken in horizontaler und vertikaler Lage fast fehlerfrei in die Verlängerung von einander eingestellt werden konnten. Wurden jedoch die Geradenstücke unter einem spitzen Winkel gegen die horizontale oder vertikale Richtung geneigt gezeichnet, so mufste bei dem Versuch einer Einstellung die Entfernung der benachbarten Endpunkte der Strecken durch eine horizontale bezw. vertikale Verschiebung der einen Strecke gegen die andere verlängert werden, wenn die Strecken in einer Geraden liegend erscheinen sollten, d. h. es trat eine Täuschung auf, welche der in der Poggendorffschen Figur beobachteten Täuschung entgegengesetzt ist. Die Täuschung bei der Streckenfigur ist gering und die Schwankungen in der Beurteilung sind ziemlich grofs.

Die folgenden Tabellen veranschaulichen die Gröfse der Täuschung durch einige Beobachtungsreihen.

Neigung 20°.

Breite: 5 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	1,2			2,0			2,1			2,0		
2	1,8			0,8			2,2			3,0		
3	2,0			1,5			2,8			2,6		
4	0,8			1,5			1,9			2,0		
5	1,9	$\mu =$	$mV =$	1,5	$\mu =$	$mV =$	3,1	$\mu =$	$mV =$	1,9	$\mu =$	$mV =$
6	1,7	0,36	0,28	0,8	0,45	0,36	1,7	0,53	0,46	2,8	0,43	0,37
7	1,3			2,0			2,0			2,7		
8	1,5			1,2			2,5			2,1		
9	1,6			1,9			3,2			3,0		
10	1,7			1,1			2,7			2,4		
Mittel	1,55			1,43			2,42			2,45		
Mittel	1,49						2,44					
Gesamtmittel	1,93											

Breite: 10 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage						Horizontale Lage					
	bewegt:											
	rechts oben			links unten			links oben			rechts unten		
1	1,6			2,2			2,8			1,9		
2	2,1			2,3			3,0			2,0		
3	1,2			2,0			3,7			1,9		
4	2,3			2,5			3,5			3,5		
5	2,3	$\mu =$	$mV =$	1,7	$\mu =$	$mV =$	3,0	$\mu =$	$mV =$	1,8	$\mu =$	$mV =$
6	2,1	0,44	0,35	2,4	0,38	0,28	3,0	0,58	0,42	3,3	0,35	0,58
7	1,6			2,1			3,4			2,4		
8	1,9			1,2			2,7			3,4		
9	2,6			1,8			3,2			2,0		
10	2,4			2,0			4,7			2,2		
Mittel	2,01			2,02			3,30			2,44		
Mittel	2,02						2,87					
Gesamtmittel	2,45											

9. Neutralisierung der geometrisch-optischen Täuschung.

Bei den Beobachtungen der Täuschung in der Poggendorffschen Figur mufste die Entfernung der zwei benachbarten Endpunkte der Geraden durch Verschiebung verkürzt, bei den Beobachtungen der Täuschung in der Streckenfigur verlängert werden. Es entsteht nun die weitere Frage nach den Bedingungen, unter welchen die Täuschung verschwindet. Die im Folgenden aufgeführten Beobachtungen, bei welchen der schwarze Streifen der Poggendorffschen Figur durch einen weifsen Streifen ersetzt wurde, zeigen Neutralisierung. Die Verlängerung, welche ein leerer Zwischenraum erfordert hätte, wird durch die Verkürzung aufgehoben, welche infolge der Überschätzung des durch die Geradenstücke und die feinen sichtbaren Grenzlinien des weifsen Streifens gebildeten Winkel bewirkt wird.

Neigung 20°.

Breite: 10 mm.

No. der Beobachtung	Vertikale Lage bewegt: rechts oben			links unten		
1	— 0,8			+ 0,8		
2	+ 0,8			0,0		
3	— 0,6			— 0,5		
4	+ 0,2			0,0		
5	— 0,3	$\mu =$	$mV =$	— 0,4	$\mu =$	$mV =$
6	— 0,8	0,40	0,42	+ 1,0	0,61	0,52
7	+ 0,3			+ 0,8		
8	— 0,4			+ 0,4		
9	0,0			+ 1,0		
10	0,0			+ 1,1		
Mittel	— 0,16			+ 0,47		
Mittel	+ 0,15					

Werden zwischen die beiden Stücke der Streckenfigur schwarze Streifen so gelegt, dafs die inneren Endpunkte der Geradenstücke gleichen Abstand von der Mittellinie des Streifens haben, wie es Fig. 14 zeigt, so müssen die Messungen der Täuschung bei zunehmender Breite der Streifen ein Bild von dem Übergang der einen Täuschungsform in die andere geben, und für eine bestimmte Breite des ganzen Streifens, welche die ausgleichende Breite genannt werden soll, ein Verschwinden der Täuschung, eine Neutralisierung, erkennen lassen.

Es wurden zunächst auf den Kartons zwei Stücke einer Geraden von je 100 mm unter 30° gegen die eine Grenzlinie der Schiene so gezogen, dafs der Abstand der inneren Endpunkte dieser Geraden von der Grenzlinie je 10 mm betrug. Die Täuschung wurde zuerst für den leeren Zwischenraum, d. h. ohne schwarzen Streifen, Breite 0 mm, und dann für schwarze Streifen von 1, 4, 8, 10, 12, 15 und 18 mm gemessen.

Die Ergebnisse der Beobachtungen sind in den folgenden Tabellen dargelegt.

Neigung 30°.

Vertikale Lage.

Bewegt: rechts oben.

No. der Beobachtung	Breite: 0 mm			Breite: 1 mm			Breite: 4 mm			Breite: 8 mm		
1	— 1,8			— 2,1			— 1,1			— 0,5		
2	— 1,9			— 2,0			— 0,6			— 0,5		
3	— 1,8			— 1,7			— 0,9			+ 0,5		
4	— 2,4			— 1,6			— 0,4			— 0,5		
5	— 1,3	$\mu =$	$mV =$	— 2,5	$\mu =$	$mV =$	0,0	$\mu =$	$mV =$	— 0,5	$\mu =$	$mV =$
6	— 1,7	0,41	0,29	— 1,5	0,49	0,38	— 0,7	0,38	0,32	— 0,2	0,48	0,36
7	— 2,2			— 1,2			— 0,2			+ 0,8		
8	— 1,9			— 1,4			— 0,9			— 0,7		
9	— 1,3			— 1,0			— 1,1			— 0,1		
10	— 1,3			— 1,0			— 0,3			— 0,3		
Mittel	— 1,76			— 1,60			— 0,62			— 0,20		

Neigung 30°.

Vertikale Lage.

Bewegt: rechts oben.

No. der Beobachtung	Breite: 10 mm			Breite: 12 mm			Breite: 15 mm			Breite: 18 mm		
1	+ 1,0			+ 2,0			+ 1,9			+ 5,1		
2	+ 0,4			+ 1,3			+ 1,5			+ 3,3		
3	+ 0,7			+ 1,8			+ 1,5			+ 4,1		
4	+ 1,3			+ 2,2			+ 2,5			+ 4,9		
5	+ 1,0	$\mu =$	$mV =$	+ 1,7	$\mu =$	$mV =$	+ 2,4	$\mu =$	$mV =$	+ 5,0	$\mu =$	$mV =$
6	− 0,4	0,57	0,41	+ 1,6	0,46	0,35	+ 2,2	0,51	0,40	+ 3,6	0,63	0,53
7	+ 0,6			+ 2,9			+ 2,6			+ 5,0		
8	+ 1,7			+ 2,1			+ 2,7			+ 4,4		
9	+ 0,9			+ 1,4			+ 3,1			+ 3,7		
10	+ 1,2			+ 2,1			+ 2,3			+ 5,4		
Mittel	+ 0,84			+ 1,91			+ 2,27			+ 4,45		

Aus diesen Tabellen ergiebt sich, dafs der Übergang aus der einen Täuschungsform in die andere stetig erfolgt. Die Verlängerung, welche die Einstellung bei der Streckenfigur erforderte, nimmt ab mit zunehmender Breite des schwarzen Streifens bis zu 8 mm. In den vorliegenden Versuchsreihen beträgt die ausgleichende Breite 8 mm, während für die mittlere Breite von 10 mm sich schon deutlich eine Verkürzung zeigt, die mit der Breite der Streifen zunimmt.

Diese Neutralisation ist in Fig. 14 durch eine Zeichnung in $^1/_2$ natürlicher Gröfse der beobachteten Figur veranschaulicht.

Fig. 1.

Fig. 2.

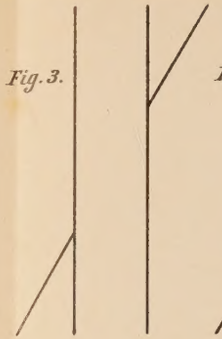

Fig. 3.

Fig. 4.

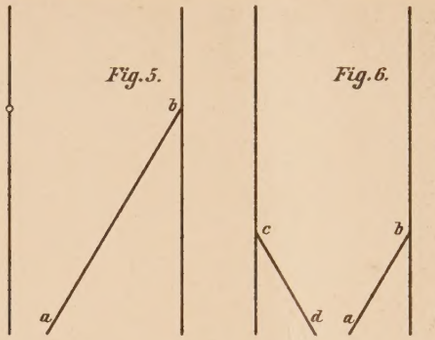

Fig. 5. Fig. 6.

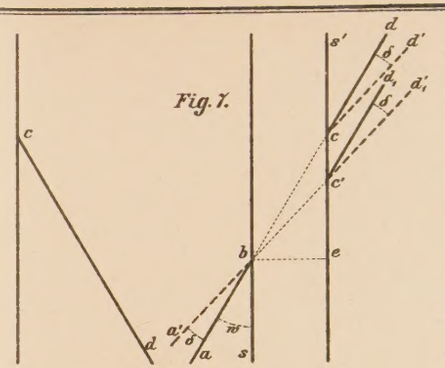

Fig. 7.

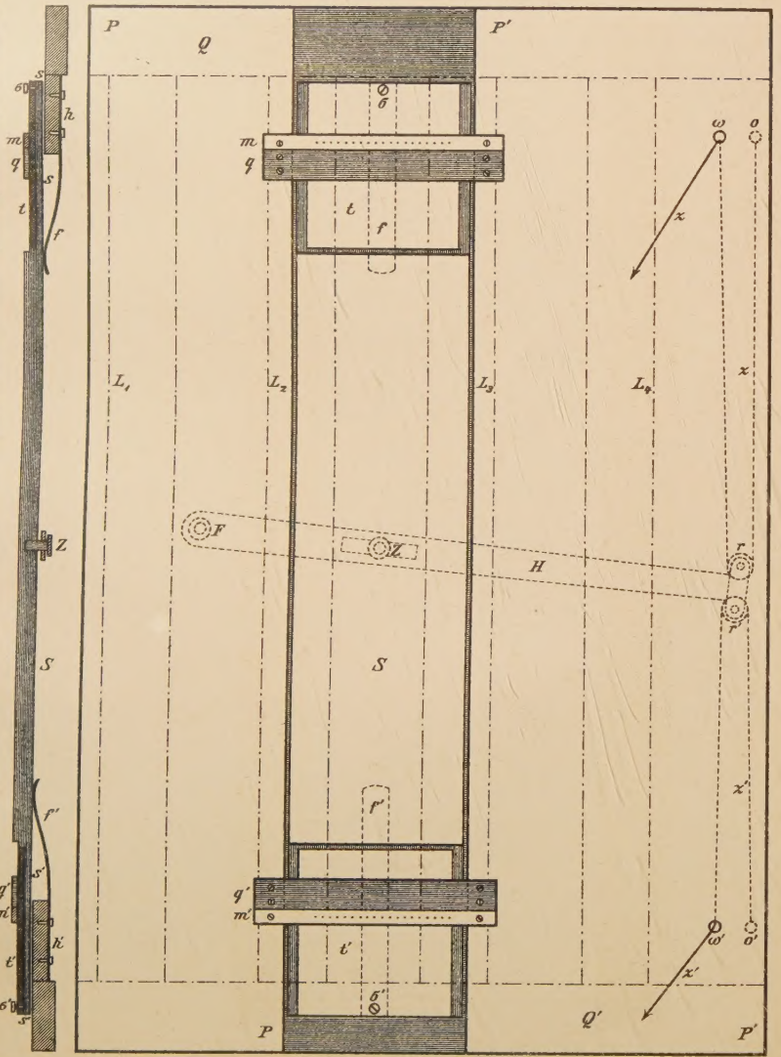

Fig. 10.
1/3 n. Gr.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13. Fig. 14.

Verlag von Leopold Voss in Hamburg und Leipzig.